12/12 (81)

Πρόταση

Έστω (E_1,ρ_1) κ (E_2,ρ_2) μ.χ. κ $f: E_1 \to E_2$ συνεχής.
Αν ο (E_1,ρ_1) είναι συμπαγής τότε κ το $R(f)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του E_2

Απόδειξη

Έστω $A_i, i\in I$ ανοιχτή εν E_2 κάλυψη του $R(f)$.

Θ.δ.ο. υπάρχει πεπερ. υποκάλυψη της.

$(\forall i\in I): A_i$ ανοιχτό $\xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f^{-1}(A_i), i\in I$ ανοιχτό εν E_1

Επίσης $\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq R(f) \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) \supseteq f^{-1}(R(f)) = E_1 \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = E_1$

$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) = E_1 \xRightarrow{E_1 \text{ συμπαγής}} (\exists J \subseteq I): \bigcup_{i\in J} f^{-1}(A_i) = E_1 \Rightarrow f\left(\bigcup_{i\in J} f^{-1}(A_i)\right) = f(E_1) \Rightarrow$

$\bigcup_{i\in J} f(f^{-1}(A_i)) = R(f) \Rightarrow \bigcup_{i\in J} A_i \supseteq R(f)$

Πχ. στον $\mathbb{R}$

$\underset{\text{συνεχής}}{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}}$, τότε $f/[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής $(-\infty<\alpha<\beta<+\infty)$

Πρόταση

Έστω $f: E_1 \to E_2$, συνεχής, όπου $(E_1,\rho_1), (E_2,\rho_2)$ μ.χ.
Έστω, επιπλέον, $S \subseteq E_1$, S συμπαγές: Τότε η f/S είναι ομ. συνεχής συνάρτηση

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$ (ε τυχών). Τότε αν $\alpha\in S$, επειδή η f συνεχής στο α,
υπάρχει $\delta=\delta_\alpha$: $(\forall x\in S): \rho_1(x,\alpha)<\delta_\alpha \Rightarrow \rho_2(f(x),f(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$(\forall \alpha\in S): B(\alpha, \frac{\delta_\alpha}{2}) = B_\alpha$ Η συλλογή $B_\alpha, \alpha\in S$ είναι ανοιχτή κάλυψη του S,

$S \subseteq \bigcup_{\alpha\in S} B_\alpha \xRightarrow{S \text{ συμπαγές}} S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in S$, $i=1,\dots,k$. $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{\alpha_1},\dots,\delta_{\alpha_k}\}$

Ας είναι x,y εν S, με $\rho(x,y)<\delta$

$x\in S \Rightarrow (\exists i\in\{1,\dots,k\}): x\in B_{\alpha_i} = B(\alpha_i, \frac{\delta_{\alpha_i}}{2})$

$\rho(y,\alpha_i) \le \rho(y,x) + \rho(x,\alpha_i) < \delta + \frac{\delta_{\alpha_i}}{2} \le \frac{\delta_{\alpha_i}}{2} + \frac{\delta_{\alpha_i}}{2} = \delta_{\alpha_i}$

$$\left.\begin{array}{l} \rho_2(f(x),f(\alpha_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \rho_2(f(y),f(\alpha_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(f(x),f(y)) \le \rho(f(x),f(\alpha_i)) + \rho(f(\alpha_i),f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

άρα f/S ομοιόμορφα συνεχής

(82)

Εφαρμογή 1

A συμπαγές, B τυχόν ($A \subseteq E, B \subseteq E, (E,\rho)$ μ.χ.)

Τότε υπάρχει $\alpha \in A$ με $\rho(A,B) = \rho(\alpha,B)$

Απόδειξη

$f(x) = \rho(x,B)$, $x \in A$.

$f: A \to \mathbb{R} \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} \underset{\text{συμπαγές}}{R(f)} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow R(f)$ κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow K = \min R(f)$

$\Rightarrow (\exists \alpha \in A): f(\alpha) = K \Rightarrow \rho(\alpha,B) = K$. $|\rho(x,B) - \rho(y,B)| \leq \rho(x,y)$

Εφαρμογή 2

A συμπαγές κ B κλειστό κ $A \cap B = 0$. Τότε $\rho(A,B) > 0$.

Απόδειξη

A συμπαγές $\Rightarrow \rho(A,B) = \rho(\alpha,B)$, $\alpha \in A)$. Έστω $\rho(A,B) = 0 \Rightarrow \rho(\alpha,B) = 0 \Rightarrow$

$\alpha \in \bar{B} \xRightarrow{B \text{ κλειστό}} B$ ΑΤΟΠΟ αφού $A \cap B = \emptyset$

Εφαρμογή 3

A συμπαγές $\Rightarrow (\exists x_0, y_0 \text{ εν } A): \delta(A) = \rho(x_0, y_0)$

Απόδειξη

$f(x,y) = \rho(x,y)$, $(x,y) \in A^2$. $\sup f(x,y) = \max f(x,y)$ Άρα $\delta(A) = \rho(x_0,y_0)$

ΛΗΜΜΑ

Αν $\{A,B\}$ είναι μια ανοιχτή διαμέριση ενός μ.χ. E, τότε η $\{A,B\}$ είναι και κλειστή και αντίστροφα

Ορισμός

Ένας μ.χ. λέγεται συνεκτικός $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nexists \text{ ανοιχτή (κλειστή) διαμέριση του } E \\ \text{σε δύο υποσύνολα του} \end{array} \right.$

Ορισμός

Ένα υποσύνολο S του μ.χ. E λέγεται συνεκτικό $\Leftrightarrow$

ο μετρ. υπόχωρος S είναι συνεκτικός

Πρόταση

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) (E,ρ) συνεκτικός

ii) Τα $\emptyset$ κ E είναι τα μόνα υποσύνολα του E που είναι ανοιχτά και κλειστά

iii) Για κάθε A, $\emptyset \neq A \subset E$ ισχύει $\partial A \neq \emptyset$

Απόδειξη

(i)$\Rightarrow$(ii) Έστω ισχύει το (i) κ όχι το (ii). Τότε υπάρχει A, $\emptyset \neq A \subset E$: A ανοιχτό και κλειστό. $\{A, A^c\}$ ανοιχτή διαμέριση του E, ΑΤΟΠΟ

(ii)$\Rightarrow$(iii) Έστω ισχύει το (ii) κ όχι το (iii). Τότε υπάρχει A, $\emptyset \neq A \subset E$ με $\partial A = \emptyset$

$\emptyset = \partial A = \bar{A} - A^\circ \Rightarrow \bar{A} \subseteq A^\circ \xRightarrow{A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}} A^\circ = A = \bar{A} \Rightarrow A$ ανοιχτό κ κλειστό, ΑΤΟΠΟ.

(iii)$\Rightarrow$(i) Έστω ισχύει το (iii) κ δεν ισχύει το (ii). Τότε υπάρχει $\{A,B\}$ ανοιχτή διαμέριση του E. Άρα A ανοιχτό κ κλειστό κ $\emptyset \neq A \subset E$

Τότε $\bar{A} = A^\circ \Rightarrow \partial A = \bar{A} - A^\circ = \emptyset$ ΑΤΟΠΟ

Πρόταση

Έστω $S \subseteq E$. Τότε

S συνεκτικό $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \nexists \text{ ανοιχτή (ή κλειστή) εν } E \text{ κάλυψη } \{A,B\} \text{ του } S \text{ με} \\ S\cap A \neq \emptyset \neq S \cap B \text{ κ } S \cap A \cap B = \emptyset \end{array} \right\} \leftarrow (*)$

Απόδειξη

($\Longrightarrow$) Έστω S συνεκτικό κ δεν ισχύει το (*).

Τότε $\exists$ ανοιχτή εν E κάλυψη A,B με $S\cap A \neq \emptyset \neq S\cap B$ κ $S \cap A \cap B = \emptyset$

$\emptyset \neq S \cap A = X \subseteq S$, X ανοιχτό εν S

$\emptyset \neq S \cap B = Y \subseteq S$, Y ανοιχτό εν S

$\emptyset = S \cap A \cap B = (S\cap A) \cap (S \cap B) = X \cap Y$

$X \cap Y = (S\cap A) \cup (S \cap B) = S \cap (A \cup B) \overset{A\cup B \supseteq S}{=\!=} S$

($\Longleftarrow$) Έστω ισχύει το (*) κ όχι ο S συνεκτικός υπόχωρος.

Άρα $\exists \{X,Y\}$ ανοιχτή εν S διαμέριση του S.

$\left.\begin{array}{l} \emptyset \neq X \subseteq S \Rightarrow (\exists\, A \text{ ανοιχτό εν } E): X = S \cap A \neq \emptyset \\ \emptyset \neq \overset{\text{ανοιχτό}}{\underset{\text{ανοιχτό}}{Y}} \subseteq S \Rightarrow (\exists\, B \text{ ανοιχτό εν } E): Y = S\cap B \neq \emptyset \end{array}\right\}$ Τώρα αρκεί ν.δ. $S \cap A \cap B = \emptyset$ κ $A \cup B \supseteq S$

$S \cap A \cap B = (S \cap A) \cap (S \cap B) = X \cap Y = \emptyset$

$X \cup Y = S \Rightarrow (S\cap A) \cup (S \cap B) = S \Rightarrow S \cap (A \cup B) = S \Rightarrow S \subseteq A \cup B$